「確率」における“奇問”と“迷答”

宮　田　敏　美

高校数学・大学入試数学において「確率」の問題や解答には他の分野の問題や解答と比べてどうもある種の“あいまいさ”がつきまとうようようです．その辺りの事情の一端を基本に戻って少し考察してみましょう．

まず初めに「確率の定義」を再確認しておきましょう．

ある試行Tによって起こり得る結果が

$$\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$$

のいずれかであるとき，これらを「標本点」または「根元事象」と呼び，集合

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n\}$$

を「標本空間」と呼びます．そしてΩの要素 $\omega_k\,(k=1, 2, \cdots, n)$ に０以上１以下の実数 p_k が対応していて， $p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = 1$ を満たしているとき， p_k を ω_k の「確率」と呼び，その対応関係（写像）を「確率法則」といいます．さらにΩの任意の部分集合，たとえば $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ を「事象」と呼び，

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3$$

を「A が起こる確率」といいます．また「標本空間Ω」と「その部分集合（事象）の全体」および「確率法則」とを合わせて「確率空間」と呼びます．

たとえば，１枚の100円硬貨と１枚の10円硬貨を投げるという試行T において，（100円硬貨，10円硬貨）の表・裏の起こり得る組（標本空間）は，

$\Omega = \{\omega_1 = $(表，表)，$\omega_2 = $(表，裏)，$\omega_3 = $(裏，表)，$\omega_4 = $(裏，裏)$\}$ ですから，「少なくとも１枚が表となるという事象 A」は $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ と表せます．そして，

(i)　$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ の各々に，たとえば

$$p_1 = \frac{1}{4},\ p_2 = \frac{1}{4},\ p_3 = \frac{1}{4},\ p_4 = \frac{1}{4}$$

を対応させれば，１つの確率空間が得られ，

$$P(A)=p_1+p_2+p_3=\frac{3}{4}$$

となります.

(ii)　$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ の各々に

$$p_1=\frac{251}{1000}, p_2=\frac{250}{1000}, p_3=\frac{250}{1000}, p_4=\frac{249}{1000}$$

を対応させても１つの確率空間が得られ,

$$P(A)=p_1+p_2+p_3=\frac{251}{1000}+\frac{250}{1000}+\frac{250}{1000}=\frac{751}{1000}$$

となります.

(iii)　$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ の各々に

$$p_1=\frac{1}{3}, p_2=\frac{1}{6}, p_3=\frac{1}{6}, p_4=\frac{1}{3}$$

を対応させても１つの確率空間が得られ,

$$P(A)=p_1+p_2+p_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

となります.

確率の定義では上の(i), (ii), (iii)はそれなりに正しく，どれかが誤りであることを証明することはできません．我々が普通に使用している硬貨である限り(iii)はふさわしくないでしょうが，それとて数学の範囲内で証明できることではありません．ましてや，(i)と(ii)のいずれが現実により近いかとなると，簡単に確かめることもできませんし，硬貨の種類にもよるかもしれません．そもそも，どの確率空間が現実を最もよく反映しているかということは，「確率論」の対象ではなく，実は「統計学」の対象なのです．（したがって，残念ながら「確率論」を勉強しても宝くじで当たる確率を増やすことはできないのです．）数学の「確率論」で扱うのは，ある確率空間が与えられたとき，上の A のようないろいろな事象の確率を求めたり，その関係を調べたりすることだけなのです．従って「硬貨を２枚投げたとき，少なくとも１枚が表となる確率を求めよ」という問題は「一足分の靴を投げたとき，少なくとも一方が表となる確率を求めよ」という問題と同様に「数学の問題」としての意味をもたないのです．意味をもたせようとすれば，例えば「表裏の出る確率が共に $\frac{1}{2}$ である２枚の硬貨を…」とか「表裏の出る確率が同様に確からしくかつ立つことはな

い２枚の硬貨を…」のように下線部を補わなければならないのです．問題によっては下線部に相当する部分が微妙な形で表現されています．たとえば「正しく作られたサイコロ」と書いてあれば「どの目の出る確率も$\dfrac{1}{6}$のサイコロ」ということでしょうし，「５個の碁石の中から無作為に２個の碁石を取る」と書いてあれば「どの２個の取り方も$\dfrac{1}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$の確率で起こる」と解釈してよいでしょう．いや「それぞれの目の出る確率が必ずしも等しくない」と断ってない限りは，サイコロというものはどの目の出る確率も$\dfrac{1}{6}$であるように作られているものだということを「常識」としなければ解けない問題もたくさんあります．つまり，「数学の問題」としては不備なのですが，根元事象の確率は「常識的に（？）」自分で与えなければならない場合も多いということです．

ところが困ったことに，確率空間が「数学的に定義されていない」どころか，「常識的に判断することもできない」ような確率の問題がときどき見受けられるのです．はじめに，次の問題を見て下さい．

【例１】１から３までの番号のつけられた３個の球を無作為に３つの袋に入れるとき，１，２の番号のつけられた球が同じ袋に入る確率を求めよ．ただし，袋を区別しないものとする．

袋を区別しないのですから，球を入れないことをϕで表すことにすると，根元事象は

$$\omega_1=(①②③,\phi,\phi),\quad \omega_2=(①②,③,\phi)$$
$$\omega_3=(①③,②,\phi),\quad \omega_4=(②③,①,\phi)$$
$$\omega_5=(①,②,③)$$

の５通りあり，そのうち①，②が同じ袋に入るという事象は$\{\omega_1,\omega_2\}$です．
さて，この５通りの根元事象に「常識的な」確率を与えることはできるでしょうか．

結論から言いますと，「否」です．まずは，どんな試行を行うのかさえはっきりしません．目の前に３個の球と３個の袋をおいたとき，一体それぞれの球をどのように袋に入れるというのでしょうか．３つの袋が目の前に並んでいる以上，たとえば左側の袋・真ん中の袋・右側の袋というように必ず区別がついてしまい，①，②，③のそれぞれをどの袋に入れるのかで $3^3=27$ 通りの根元事象が生じ，これらは等確率とするのが「常識的」でしょう．そうすれば，ω_1 の確率は $\dfrac{3}{27}$，ω_2 の確率は $\dfrac{6}{27}$ となりますから，求める確率は $\dfrac{3}{27}+\dfrac{6}{27}=\dfrac{1}{3}$ となります．しかし，これは「袋を区別しない」という条件を全く無視しています．

敢えてこの条件を考慮した試行を想像するとすれば，次のようになるでしょうか．つまり，「$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ と書いた５枚のカードを用意し，そこから無作為に１枚のカードを引き，それに対応するように袋に球を入れる」という試行を行うと解釈することです．この試行のもとでは，ω_1, ω_2 の確率はいずれも $\dfrac{1}{5}$ となり，求める確率は $\dfrac{2}{5}$ となります．しかし，問題文から上のようなカードを引くという試行を想像せよというのはどうみても「常識的」ではありません．いずれにしても，確率を考えるときに「袋を区別しないことにする」ということが「常識的」ではなく，答えようのない「奇問」と言わざるを得ないでしょう．

次の例はある模擬試験の問題と解答で，実は【例１】と同じ種類の「奇問」なのですが，奇妙さが陰に隠れてしまうため，納得しながら読み過ごしてしまいそうです．

> 【例２】１から９までの番号のつけられた９個の球を区別できない３つの袋に３個ずつ入れるとき，１，２，３の番号のつけられた球が同じ袋に入る確率を求めよ．

《解》９個の球を３つずつ３つの袋に入れる方法は，袋の区別がないことに注意して，$\dfrac{{}_9C_3 \cdot {}_6C_3}{3!}=280$通りある．そのうち，１，２，３の番号をつけられた球が同じ袋に入るのは，１，２，３の番号をつけた球を１つの袋に入れて，残りの６個の球を空の２つの袋（区別はつかない）に入れればよいから，その方法は，$\dfrac{{}_6C_3}{2!}=10$ 通りあり，その確率は $\dfrac{10}{280}=\dfrac{1}{28}$ である．

「区別できない３つの袋に球を３個ずつ入れる」というのはどんな状況を指しているのでしょうか．そもそも「区別できない袋」というものがどんな袋なのかわかりません．《解》からみても「たとえば大小などがなく，一見しただけでは区別がつきにくいから，どの袋を選ぶ確率も等しい」というような意味ではないようです．しかし，どんな科学的手段を講じても区別できない『袋』があるとは思えません．（ここで『袋』に『　』をつけたのは，『素粒子』の世界では区別できないものを考えるからです．）どう見ても「区別しないことにする」の誤りのようですが，しかしそう解釈したところで【例１】と同様にこの条件の下に確率を考えるのはナンセンスです．ただこの例では，たまたま《解》の280通りの各々が袋を区別した場合の ${}_9C_3 \cdot {}_6C_3=1680$ 通りの根元事象のうちの $3!=6$ 通りずつを含むため，280 通りが等確率であるかのように錯覚し，《解》を，したがって【問題】を奇妙に思わないのです．

この問題の出題者には「ある事象の確率は根元事象の確率の和である」という認識がなく，単に「場合の数の比が確率である」と考えているとしか思えません．先日，最近のベストセラーといわれる参考書を見ていたら，「同様に確からしい」ということさえ断わらずに，

「事象Aの確率の定義は　$\dfrac{[\text{事象Aの起こる場合の数}]}{[\text{起こり得るすべての場合の数}]}$

だから，場合の数さえわかれば，（確率には）ほとんど勉強するものはない」などと書いてあって驚きましたが，生徒諸君ばかりでなく教師や模試出題者の側も，「高校数学における確率」について再考する必要がありそうです．

【例３】白球４個，黒球３個が入っている箱がある．この箱から３個の球を取り出して一列に並べることにする．ただし，同色の球は区別しない．

(1) 一列に並べる方法は全部で何通りあるか求めよ．

(2) 一列に並べたとき，同色の球が隣り合うことのない確率を求めよ．

(1) は白球をW，黒球をBとしたとき，

WWW，WWB，WBW，BWW，

WBB，BWB，BBW，BBB

の８通りあります．

さて(2) ですが，たとえば，ワープロのキーボードでW のキーか B のキーかのどちらか一方を無作為に選んで３回打つというような試行では「区別しないもの」を考えます．WWB と打ったとき最初の W と２個目の W を入れ替えたものを別のものと考えるというのは無意味だからです．しかし，「同色の球を区別しないで３個取り出す」というのは一体具体的にどうしたらよいのでしょうか．敢えて想像するとすれば，「箱の中を２つに仕切り，一方に白球を４個，他方に黒玉を３個入れ，箱の中に手を入れる度に無作為に２つの仕切りのどちらかに手を入れ，球を１個取り出すことを３回繰り返す」とでも考えるほかないようです．このような試行のもとでなら，(1)の８通りは等確率となり，求める確率は $\frac{1}{4}$となります．しかし，問題文からそこまで解釈するというのは「常識的」とは言えません．（ところで，この試行では白球・黒球それぞれの個数は３個以上なら何個あってもよいことになります．これは上のワープロの例を考えれば当然です．）

また仮に，球を区別すれば根元事象は${}_7P_3 = 7{\cdot}6{\cdot}5$通りあり，それらを等確率とすれば，WBW となる確率は $\frac{4{\cdot}3{\cdot}3}{7{\cdot}6{\cdot}5} = \frac{6}{35}$，BWB となる確率は $\frac{3{\cdot}4{\cdot}2}{7{\cdot}6{\cdot}5} = \frac{4}{35}$ですから，題意の確率は $\frac{6}{35} + \frac{4}{35} = \frac{2}{7}$となりますが，これではやはり「同色の

球は区別しない」という条件は一体何だったのかということになってしまいます.

いずれにしても⑴の根元事象に「常識的な」確率を与えることに無理があるのです. つまり, 「同色の球は区別しない」という条件の下で確率を求めさせる問題自体が「奇問」なのです.

次は実際に大学入試問題として出題された問題とO 社の解答で, 【例３】と同様の「奇問」なのですが, やはり奇妙さが陰に隠れてしまうため, 一見正しい問題と正しい解答であるかのように錯覚しそうです.

【例４】白球３個, 黒球２個が入っている箱がある. この箱から５個の球を取り出して一列に並べることにする. ただし, 同色の球は区別しない.

(1) 一列に並べる方法は全部で何通りあるか求めよ.

(2) 一列に並べたとき, 同色の球が隣り合うことのない確率を求めよ.

(96. 福井大)

《解》(1) $\dfrac{5!}{3!2!}=10$

(2) (1)のうち題意に適するのは白黒白黒白と並ぶときだけであるから $\dfrac{1}{10}$

⑴は問題ありませんが, ⑵の確率を求めるとき⑴の 10 通りの各々が $\dfrac{1}{10}$ の確率で起こるということはどうしてわかるのでしょうか. 【例３】の場合と同様に「区別しない球」を取り出すときの根元事象に対して「常識的に」確率を付与することはできません. ただこの場合もたまたま, ⑴の 10 通りの各々が, 球を区別したときの根元事象を 12 通りずつ含むため, 等確率であるかのように思い込んでしまい, 何の問題もないように錯覚するのです. 大学側が「⑵つまり確率の問題では, たとえ『区別しない』と書いてあっても, “球”などは区別しなければいけない」ことの例として出題したのだとしたら納得いきますが, もし本当にそうだとしたら余りにも陰険な問題と言わざるをえない

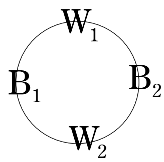
でしょう.

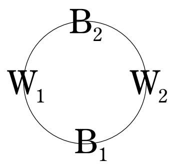
次は，問題の方には何の不備もないのですが，《解》の方に注目して下さい.

【例５】白い玉を２個，黒い玉を２個，全部で４個の玉を円周上に並べる. このとき，同じ色の玉が隣り合わない確率を求めよ.　　　(93．東北大)

《解》４個の玉を円周上に並べる並べ方は$\dfrac{4!}{4}=6$通りであり，そのうち同じ色の玉が隣り合わない並べ方はW_1から見て B_1, W_2, B_2の順に並ぶ場合と，B_2, W_2, B_1の順に並ぶ場合の２通りであるから，求める確率は$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

この解答をどう思いますか．やはり根元事象は６通りではありませんね．２個の白い玉 W_1, W_2 と２個の黒い玉 B_1, B_2を実際に机の上に並べることを想像してみて下さい．右の２つの並べ方はどうみても異なった並べ方です．「90度回転したら同じになる」などということは根元事象の数には何の関係もありません．あくまで別の根元事象なのです．４個の玉を並べる並べ方は$4!=24$通りあり，それらは等確率で起こると考えてよいでしょう．そして，同じ色の玉が隣り合わない並べ方は８通りありますから，求める確率は $\dfrac{1}{24}\cdot 8=\dfrac{1}{3}$ となります.





ただ，$\dfrac{4!}{4}=6$通りの各々が４通りずつの等確率の根元事象を含みますから，《解》の解き方でも間違いとはいえませんが，「円周上に並べるのだから，円順列の比を求めればよい」と考えているような解き方で，やや自然さを欠くような気がします.

ただし次の例のように，根元事象まで戻ることなく確率を計算することもしばしばあります.

【例６】当たりくじ３本を含む 10 本のくじから，A，B，C の３人が１本ずつ順に引くとき，ちょうど１人が当たりくじを引く確率を求めよ.

《解Ⅰ》３人のくじの引き方は$10\cdot 9\cdot 8$通りあり，それらは等確率で起こる考えられる．そのうちちょうど１人が当たる場合は，誰が当たるかで３通り，どのくじで当たるかで３通り，他の２人のはずれくじの引き方で$7\cdot 6$ 通りあるから，求める確率は $\dfrac{3\cdot 3\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{21}{40}$

《解Ⅱ》３本引いたとき当たりくじを１本含む確率に等しいから，求める確率は $\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{21}{40}$

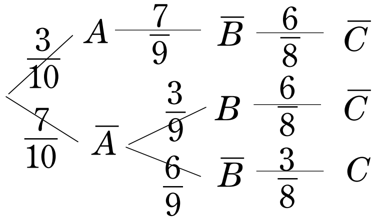
A，B，Cの３人が１本ずつ順に引くのですから，当たりくじを a_1, a_2, a_3 とし，はずれくじを $b_1, b_2, \cdots, b_7$ とし，（A の引いたくじ，B の引いたくじ，C の引いたくじ）の組を考えるとき，たとえば(a_1, b_1, b_2) と (b_1, a_1, b_2) とは別の根元事象です．したがって基本的な解法は《解Ⅰ》の方ですが，《解Ⅱ》の分母，つまり 10 本のくじから順序の区別をしないで３本引く方法${}_{10}C_3$ 通りの各々が 3!通りの等確率の根元事象を含むことはほぼ自明ですから，普通《解Ⅱ》の解法をとることが多いようです.

【例４】の《解》と，【例５】の《解Ⅱ》の解法に本質的な違いはないのですが，【例４】では《解》のように円順列を考えるより，回転すれば同じになるというようなことを気にせずに，単なる順列を考える方が簡単でしょうし，一方 10 個の異なるものから３個選ぶ方法の数${}_{10}C_3$ が $\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}$ に等しいことは完全に公式化していますから，【例５】では《解Ⅱ》の方がやや自然ではないかと思います.

ところである問題に対して，根元事象がただ１通りに決まるというわけでは

ありません．たとえば【例６】でも，各人がくじを引くという試行をそれぞれ別の試行とみると次の《解Ⅲ》のようになり，これも１つの正しい解法です．

《解Ⅲ》各人が残ったくじのうちのどのくじを引くかは等確率と考えられるから，「Xが当たりくじを引くという事象」をXのように表した右の樹形図を用いて，求める確率は

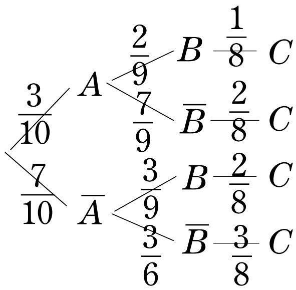


$$\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{40}$$

同様に次の【例７】のような場合も，各人がくじを引くという試行をそれぞれ別の試行とみると《解Ⅰ》のような解法となり，３人が１本ずつくじを引くことを１つの試行とみると《解Ⅱ》のような解法となり，どちらも正しい解法と考えてよいでしょう．

【例７】当たりくじ３本を含む10本のくじから，A，B，Cの３人が１本ずつ順に引くとき，Cが当たりくじを引く確率を求めよ．

《解Ⅰ》各人が残ったくじのうちのどのくじを引くかは等確率と考えられるから，右の樹形図を用いて，求める確率は次のように計算できる．



$$\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{10}$$

《解Ⅱ》３人のくじの引き方は$10\cdot9\cdot8=720$通りあり，それらは等確率で起こる考えられる．そのうちCが当たる場合は，Cがどの当たりくじを引くかで３通り，そのときA，Bがどのくじを引いているかで$9\cdot8=72$通りあるから，求める確率は$\dfrac{3\cdot72}{720}=\dfrac{3}{10}$