０７０６．軌跡

☒Ｃ－１☒　xy 平面上に 2 直線 $l: y=\sqrt{3}(x-1)$, $m: y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+1)$ がある. l, m をそれぞれの x 切片を中心に，反時計回りに角 θ だけ回転して得られる直線を l_θ, m_θ とするとき，次の点 P, Q の軌跡の方程式を求めよ.

(1)　θ を $0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ の範囲で変化させるときの l_θ と m_θ の交点 P.

(2)　θ を $0^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ$ の範囲で変化させるときの l_θ と $m_{-\theta}$ の交点 Q.

【発想法】

l_θ の方程式を実際に求めると $-x\sin\theta+y\cos\theta=\sqrt{3}(x\cos\theta+y\sin\theta-1)$ つまり $(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)x+(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)y=\sqrt{3}$ となります. 同様に m_θ の方程式も求めてから，連立方程式を解いて，交点 P の座標を求めて・・・などと考えるととんでもないことになります．求めたいのは，点 P の軌跡であって，点 P の座標ではないのです．とにかく $\mathrm{P}=(X, Y)$ とおくことから出発し, X, Y の関係式を作ろうと考えるべきなのです.

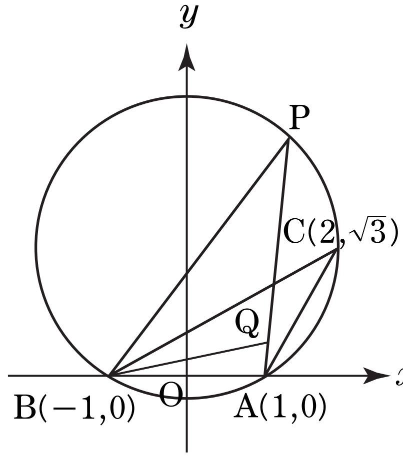
その際，直線の回転角をどう扱うかが問題となります．普通の参考書では,「傾き m_1 の直線を θ 回転して傾き m_2 の直線になるときは $\tan\theta=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$ が成り立つ」という公式が用いられていますが，理数研では次の公式を勧めています.

「ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ からベクトル $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ への回転角を θ とすると $\tan\theta=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1x_2+y_1y_2}$ が成り立つ」

これは $\tan\theta=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$ に $m_1=\dfrac{y_1}{x_1}$, $m_2=\dfrac{y_2}{x_2}$ を代入しても得られますが，内積の公式 $x_1x_2+y_1y_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ と，面積の公式 $x_1y_2-x_2y_1=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ から求める方が分かり易く，かつ統一的でしょう.

【解答】

(1)　P $=(X,Y)$ とする.



$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ から $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}X-1\\ Y\end{pmatrix}$ への回転角と

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ から $\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}X+1\\ Y\end{pmatrix}$ への回転角が等しいから,

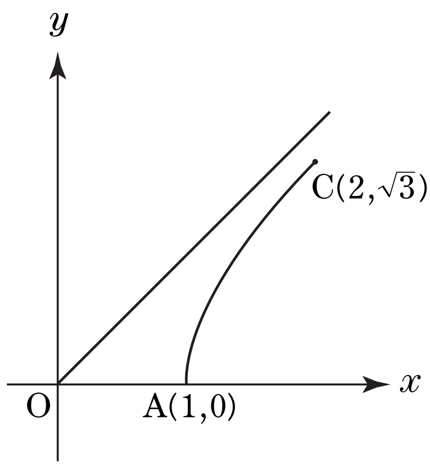
$$\tan\theta=\frac{Y-\sqrt{3}(X-1)}{X-1+\sqrt{3}Y}=\frac{3Y-\sqrt{3}(X+1)}{3(X+1)+\sqrt{3}Y}\cdots\cdots①$$

$$\therefore\ \{Y-\sqrt{3}(X-1)\}\{Y+\sqrt{3}(X+1)\}-\{\sqrt{3}Y+X-1\}\{\sqrt{3}Y-(X+1)\}=0\cdots\cdots②$$

ここで $\theta=90^\circ$ の場合①の分母が共に 0 となり除かれるが②ではその場合も含まれる.
これを整理すると $X^2+(Y-\sqrt{3})^2=4$ となるが，図形的考察から，P はこの円周上を点 C から点 B$(-1,0)$ まで動く．よって，求める軌跡は,

$$x^2+(y-\sqrt{3})^2=4\ \left(y\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)\right)$$

(2)　Q $=(X,Y)$ とする.



$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ から $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}X-1\\ Y\end{pmatrix}$ への回転角と

$\overrightarrow{BP}=\begin{pmatrix}X+1\\ Y\end{pmatrix}$ から $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ への回転角が等しいから,

$$\tan\theta=\frac{Y-\sqrt{3}(X-1)}{X-1+\sqrt{3}Y}=\frac{\sqrt{3}(X+1)-3Y}{3(X+1)+\sqrt{3}Y}$$

$$\therefore\ \{Y-\sqrt{3}(X-1)\}\{Y+\sqrt{3}(X+1)\}+\{\sqrt{3}Y+X-1\}\{\sqrt{3}Y-(X+1)\}=0$$

これを整理すると $X^2-Y^2=1$ となるが，図形的考察から, P はこの双曲線上を点 C から点 A$(1,0)$ まで動く．よって，求める軌跡は

$$x^2-y^2=1\ (0\leqq x\leqq\sqrt{3},y\geqq 0)$$