１１１１．行列の補充問題

☒**D－1**☒　実数を成分とする２次の正方行列 A と，実数を成分とする $\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ に対して，$A\vec{p}=\vec{q}$, $A\vec{q}=-\vec{p}$ が成り立つとき，$A^2=-E$ であることを示せ．

☒**D－2**☒　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，２次方程式 $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ の解を α，β とする．n が自然数であるとき，次が成り立つことを証明せよ．

(1)　$\alpha \fallingdotseq \beta$ ならば，$A^n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A-\dfrac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}E$

(2)　$\alpha=\beta$ ならば，$A^n=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^n E$　（大分医大）

☒**D－3**☒　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $(a \fallingdotseq d)$ とするとき，任意の自然数 n に対して $A^n=a^nX+d^nY$ となるような行列 X，Y が存在することを証明せよ．

☒**D－4**☒　$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とするとき，２以上の整数 n に対して次式が成り立つことを示せ．

$$0<a_n \leqq b_n=c_n \leqq 2a_n \leqq d_n \leqq 3a_n$$

（高知大）

☒**D－5**☒　$A^2+A+E=O$ を満たす２次の正方行列 A がある．

(1)　$A-pE$ $(p \in \boldsymbol{R})$ の逆行列を A を用いて表せ．

(2)　$B=(A-E)(A-2E)$ とするとき，B の逆行列を A を用いて表せ．　（香川医大）

☒**D－6**☒　２次の正方行列 A が，ある自然数 n に対して $A^n=O$ を満たすならば，$A^2=O$ であることを示せ．

☒**D－7**☒　$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $(a, b, d \in \boldsymbol{R})$ の形の行列を上三角行列という．上三角行列 A に関する次の各々を証明せよ．

(1)　$A^3=E$ ならば $A=E$ である．　(2)　$A^4=E$ ならば $A^2=E$ である．

☒**D－8**☒　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{R}, abcd \fallingdotseq 0, ad=bc)$ と，$AX=XA=O$, $X \fallingdotseq O$ を満たす行列 X がある．

(1)　X は $\widetilde{A}$ の実数倍であることを示せ．ただし，$\widetilde{A}$ は A の余因子行列 $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である．

(2)　$XY=YX=O$ を満たす行列 Y は A の実数倍であることを示せ．　（07．大阪市大）

☒**D－9**☒　(1)　２次の正方行列 A，P，Q が

$$A=aP+(a+1)Q, P^2=P, Q^2=Q, PQ=O, QP=O \ (a \in \boldsymbol{R})$$

を満たすとき，$(P+Q)A=A$ が成り立つことを示せ．

(2)　$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ $(a>0)$ に対し (1) のすべての条件を満たす行列 P，Q を求めよ．

(3)　$A_k=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ $(k \in \boldsymbol{N})$ とするとき，積 $A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots\cdots A_2$ を求めよ．　（07．東大）