『論証の京大』への対策

古くから『論証の京大』と言われながら，しばらくはそれらしい問題も影をひそめていました．しかし最近になって再び盛り返してきたようです．知識・計算・技巧よりも思考力・論証力・表現力を要する問題が増えてきたということです．「ああ，あれか」という問題はほとんどなく，たとえ試験場に参考書の持ち込みを許したとしても，点数は１点も変わらないことでしょう．つまり，全問その場で一から考えなければできない問題ばかりということです．また，以上のことと無関係ではありませんが，どの分野からの出題かが特定できない問題が多いことも京大の特徴です．

今回は，論証問題の中でも特に扱いにくい「存在命題」に的を絞って，着想の仕方・答案のまとめ方を考察してみようと思います．

【例題１】（96 年後期・理系）

$x\,,y$ は $x+y>0\,,\,x-y>0$ を満たす実数とする．ある四面体の隣り合う２辺の長さが $\sqrt{x+y}\,,\sqrt{x-y}$ で，残り４辺の長さはすべて１であるという．このような条件を満たす点 $(x\,,y)$ の存在範囲を図示せよ．

三角形ならともかく，四面体の存在条件を簡単な不等式で書ける人はいないでしょう．三角形の存在条件を４つ書いても十分でないことは明らかでしょう．では，どうするか？　ここがこの問題の最大のポイントですが，座標を設定することに気付かないとかなりシンドイですね．たとえば「１辺１の正三角形を xy 平面上にのせて，もう１つの頂点の z 座標が 0 でない実数値をとればいいな」と頭の中で展開できれば，あとは計算するだけですね．

［解答］

３頂点が

$$\mathrm{O}(0\,,0\,,0)\,,\ \mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,0\right)\,,\ \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,0\right)$$

であるように座標軸を設定し，

$$\mathrm{OP}=1\,,\ \mathrm{AP}=\sqrt{x+y}\,,\ \mathrm{BP}=\sqrt{x-y}$$

を満たす点 P を $(p\,,q\,,r)$ とすれば，

$$p^2+q^2+r^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(q-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+r^2=x+y \quad \cdots\text{②}$$

$$\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(q-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+r^2=x-y \quad \cdots\text{③}$$

②−③ より $p=-y$．よって, ①−② から得られる $p+\sqrt{3}q=2-x-y$ とから

$$q=\frac{2-x}{\sqrt{3}}$$

これらを ① に代入して

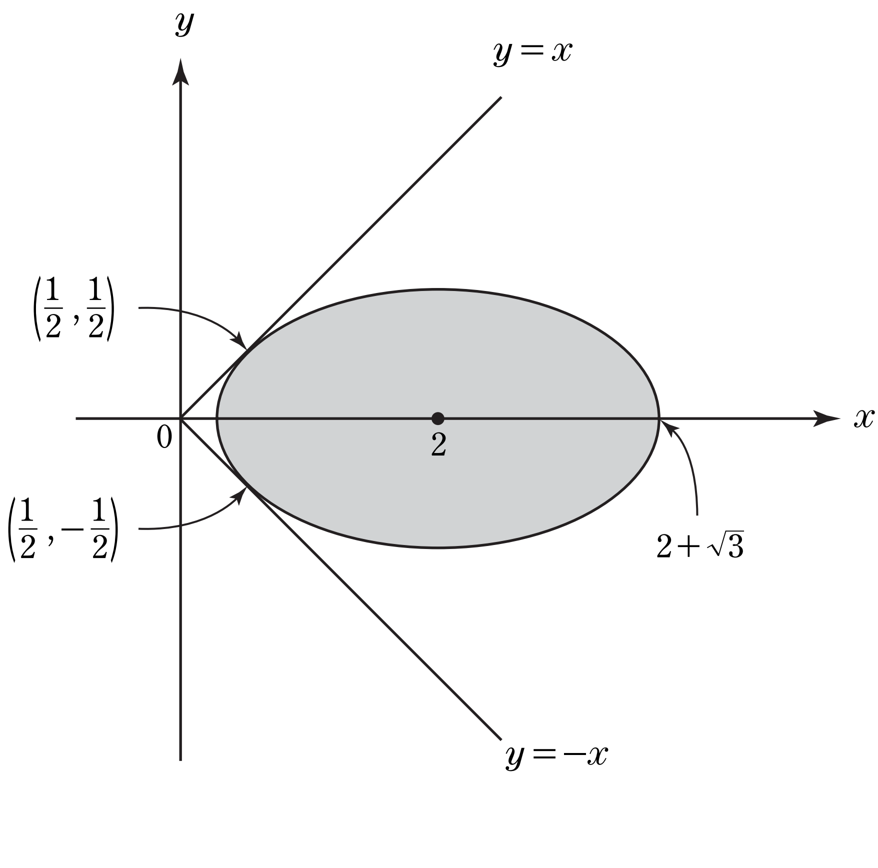
$$y^2+\frac{(x-2)^2}{3}+r^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{④}$$

求める条件は ①, ②, ③ を同時に満たす実数 $p,q,r(r \fallingdotseq 0)$ が存在することと同値であり, これはさらに ④ を満たす 0 でない実数 r が存在することと同値であるから, 求める条件は

$$\frac{(x-2)^2}{3}+y^2<1$$

である.

点 $(x\,,y)$ の存在範囲は下図の打点部で境界を含まない.



実はこれと似たような問題が過去にも出題されています.

【例題２】(85 年後期・文理系共通)

実数 p , q $(q>0)$ に対して，下の２条件①，② を満たす三角形 ABC が存在するための必要十分条件を求めよ.

① $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=q$　　② $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=p$

ただし, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を表す.

三角形の存在条件ですから, 余弦定理などを利用してもなんとかなりますが, 十分性の確認など結構難しくなります．やはり座標を設定すれば簡単に解決します.

[解答]

$\mathrm{B}(0\,,0)\,,\mathrm{C}(q\,,0)$ となる座標を決定し, $\mathrm{A}(x\,,y)$ とすると,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-x\,,-y)\,,\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(q-x\,,-y)$ であるから，② は $x(x-q)+y^2=p$ つまり

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y^2=p+\frac{q^2}{4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

となる．そして求める条件は ③ を満たす 0 でない実数 y が存在することと同値であるから，求める条件は　$p+\dfrac{q^2}{4}>0$

ところで，次の問題も一種の存在証明の問題です.

【例題３】(96 年後期・理系)

$m\,,n$ は自然数で, $m<n$ を満たすものとする. $m^n+1\,,n^m+1$ がともに10 の倍数となる $m\,,n$ を１組与えよ.

こういう問題で $m\,,n$ の組の見つけ方をくどくど書く人がいますが，場合によっては減点ものです. 採点者にとっては, 解答者がすぐに気付こうが，苦労して見付けようが，どうでもいいのです. ただ，それが条件に合う例になっていることを示しておくのは, 解答者の義務です.

[解答]

　$m=9, n=19$ とすると，

$m^n+1=(9+1)(9^{18}-9^{17}+\cdots+9^2-9+1)$

$n^m+1=(19+1)(19^8-19^7+\cdots+19^2-19+1)$

となるからいずれも 10 の倍数となる

　さて，次の問題の（1）も「存在証明」です．

【例題４】（96 年後期・理系）

　n は自然数とする．

（1）　すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta),$$

$$\sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

　を満たし，係数がともにすべて整数である n次式 $f_n(x)$ と $n-1$次式 $g_n(x)$ が存在することを示せ．

（2）　$f_n'(x)=ng_n(x)$ であることを示せ．

（3）　p を３以上の素数とするとき，$f_p(x)$ の $p-1$次以下の係数はすべて p で割り切れることを示せ．

　（1）では『数学的帰納法』を用いるのが普通でしょうが，「存在証明」をきちんと書けますか．（『ド・モアブルの定理』と『２項定理』を利用した直接証明も考えられます．）前問でも触れたように，「存在証明」では，導出過程を書く必要は全くないのです．計算用紙で見通しをたてておいて，解答用紙にはいきなり結果から書き出すというのが「存在証明の礼儀（流儀？）」というものです．

　また，この問題では（n次式）+（n次式）が（n次式）とは限らないところをどう処理するかも一つのポイントとなります．次の下線部のように結論を少し拡張しておけば解決します．

[解答]

（1）　<u>係数がすべて整数であり，最高次の係数が正</u>の n次式 $f_n(x)$ と $n-1$次式 $g_n(x)$ が

存在して

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta),\ \sin n\theta = g_n(\cos\theta)\sin\theta$$

が成り立つとする．ここで

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = xf_n(x) + (x^2-1)g_n(x) \\ g_{n+1}(x) = f_n(x) + xg_n(x) \end{cases}$$

とおくと，$f_{n+1}(x)$ は下線部を満たす $n+1$次式，$g_{n+1}(x)$ は下線部を満たす n次式であり

$$\begin{aligned}
&\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta \\
&\quad = f_n(\cos\theta)\cos\theta - g_n(\cos\theta)\sin^2\theta \\
&\quad = \cos\theta f_n(\cos\theta) + (\cos^2\theta - 1)g_n(\cos\theta) \\
&\quad = f_{n+1}(\cos\theta) \\
&\sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta \\
&\quad = g_n(\cos\theta)\sin\theta\cos\theta + f_n(\cos\theta)\sin\theta \\
&\quad = \{f_n(\cos\theta) + \cos\theta g_n(\cos\theta)\}\sin\theta \\
&\quad = g_{n+1}(\cos\theta)\sin\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ.

そして，$f_1(x) = x$，$g_1(x) = 1$ とすると

$$\cos\theta = f_1(\cos\theta),\ \sin\theta = g_1(\cos\theta)\sin\theta$$

となるから，結論は証明された.

(2)，(3) 省略.