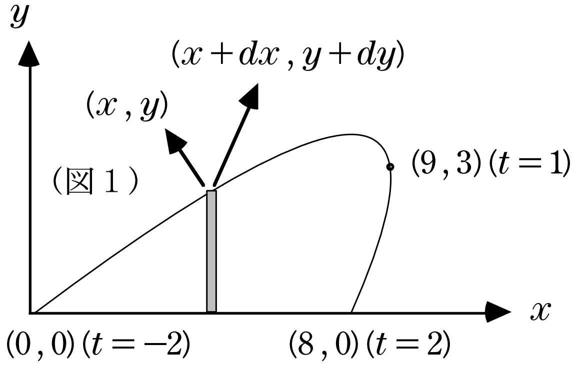
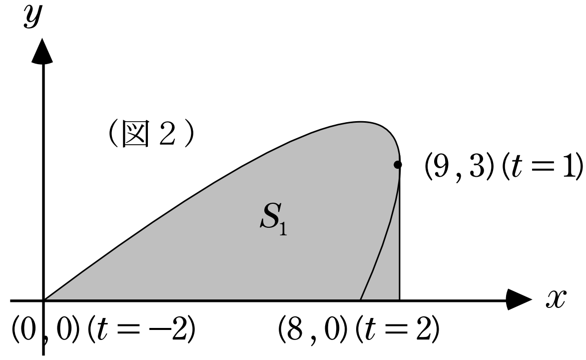
「線積分」について

時刻 t における座標が $x=-t^2+2t+8\,,\,y=-t^2+4$ と表せる点 $\mathrm{P}(x\,,y)$ は，時刻 $t=-2$ に点 $(0\,,0)$ を出発し，図のような曲線上を x 座標が増加する方向に進み，時刻 $t=1$ に点 $(9,3)$ を達し，そこからは x 座標が減少する方向に進み，時刻 $t=2$ に点 $(8\,,0)$ に到達します．



時刻 t に $(x\,,y)$ にいた点が，時刻 $t+dt$ に $(x+dx\,,y+dy)$ へ移動したとすると，ydx は（図１）の微小打点部の面積を表しますから，これを $t=-2$ から $t=1$ まで積分したもの，つまり $S_1=\int_{(t=-2)}^{(t=1)}y\,dx$ は（図２）の打点部の面積を表します．

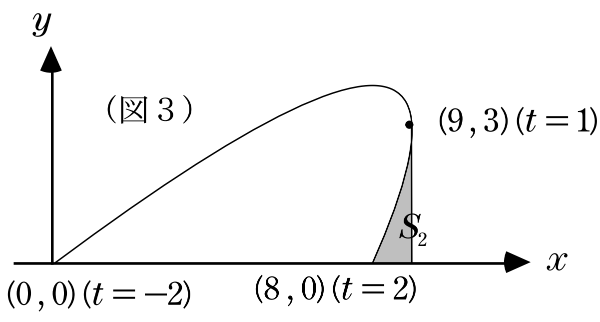


そしてこれは $y\,dx=y\dfrac{dx}{dt}dt$ を用いて次のように計算します．

$$S_1=\int_{(t=-2)}^{(t=1)}y\,dx=\int_{-2}^{1}y\frac{dx}{dt}dt=\int_{-2}^{1}(-t^2+4)(-2t+2)dt$$
$$=\int_{-2}^{1}(2t^3-2t^2-8t+8)dt=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^3-4t^2+8t\right]_{-2}^{1}=\frac{45}{2}$$

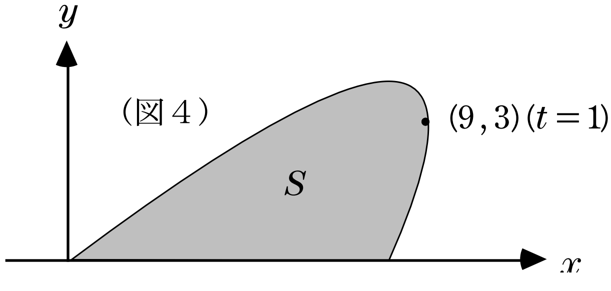
また（図３）の打点部の面積 S_2 は ydx を，x が増加する向き，つまり $t=2$ から $t=1$ の方へ積分して

$$S_2=\int_{(t=2)}^{(t=1)}y\,dx=\int_{2}^{1}y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\int_{2}^{1}(-t^2+4)(-2t+2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^3-4t^2+8t\right]_{2}^{1}=\frac{7}{6}$$



と求まります．

したがって $S_1-S_2=\dfrac{64}{3}$ は（図４）の打点部の面積 S に等しくなります．



ところで ydx を x が減少する向き，つまり $t=1$ から $t=2$ の方へ積分す

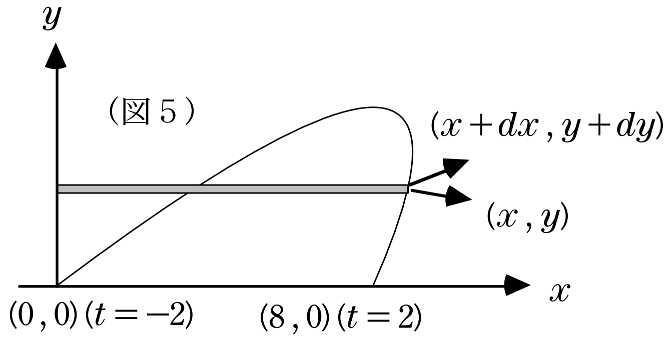
$$\int_{(t=1)}^{(t=2)} y\,dx = \int_1^2 y\frac{dx}{dt}dt = -\frac{7}{6}$$

のように$(-S_2)$が求まりますから，ydx を一度に $t=-2$ から $t=2$ まで積分したものは $S_1+(-S_2)$ つまり面積 S を表すことになります．実際

$$\int_{(t=-2)}^{(t=2)} y\,dx = \int_{-2}^2 y\frac{dx}{dt}dt = \int_{-2}^2 (-t^2+4)(-2t+2)dt$$
$$=2\int_0^2 (-2t^2+8)dt = 2\left[-\frac{2}{3}t^3+8t\right]_0^2 = \frac{64}{3}$$

となり，先程の計算結果と一致します．

また，この面積 S は（図５）の微小打点部の面積 xdy を $t=2$ から $t=-2$ まで積分しても求まります．実際



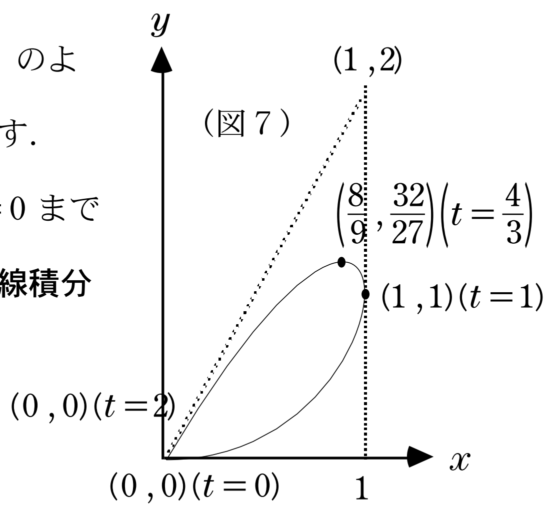
$$S = \int_{(t=2)}^{(t=-2)} x\,dy = \int_2^{-2} x\frac{dy}{dt}dt$$
$$=\int_2^{-2} (-t^2+2t+8)(-2t)dt$$
$$=2\int_2^0 (-4t^2)dt = 2\left[-\frac{4}{3}t^3\right]_2^0 = \frac{64}{3}$$

となり，同じ結果が得られます．

以上のように，ある曲線 C 上を動く点 $(x\,,y)$ に対して $y\,dx$ や $x\,dy$ を，ある点から別の点まで積分することを「C 上での**線積分**」といいます．

別の例を見てみましょう．t が $t=0$ から $t=2$ まで変わるとき，点 $(2t-t^2\,,2t^2-t^3)$ は（図７）のように原点を出発して左周りして原点に戻ります．

この曲線の囲む面積は $y\,dx$ を $t=2$ から $t=0$ まで**線積分**するか，$x\,dy$ を $t=0$ から $t=2$ まで**線積分**すれば求まります．



$$S = \int_{(t=2)}^{(t=0)} y\,dx = \int_2^0 y\frac{dx}{dt}dt$$
$$=2\int^0 (2t^2-t^3)(1-t)dt$$

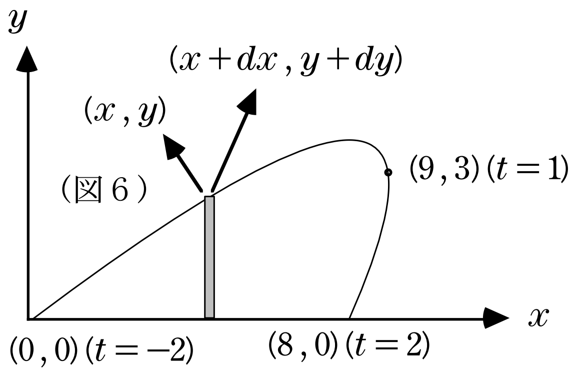
$$=2\int_2^0 (2t^2-3t^3+t^4)\,dt=2\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{5}t^5\right]_2^0=\frac{8}{15}$$

または

$$S=\int_{(t=0)}^{(t=2)} x\,dy=\int_0^2 x\frac{dy}{dt}dt=\int_0^2 (2t-t^2)(4t-3t^2)\,dt=\left[\frac{8}{3}t^3-\frac{5}{2}t^4+\frac{3}{5}t^5\right]_0^2=\frac{8}{15}$$

以上のことは体積の場合も同様で，（図１）の曲線と x 軸とで囲まれた図形を x 軸の周りに回転させて得られる立体の体積 V は，（図６）の微小部分を回転させたときの体積 $\pi y^2\,dx$ を $t=-2$ の点から $t=2$ の点まで**線積分**することによって得られます.

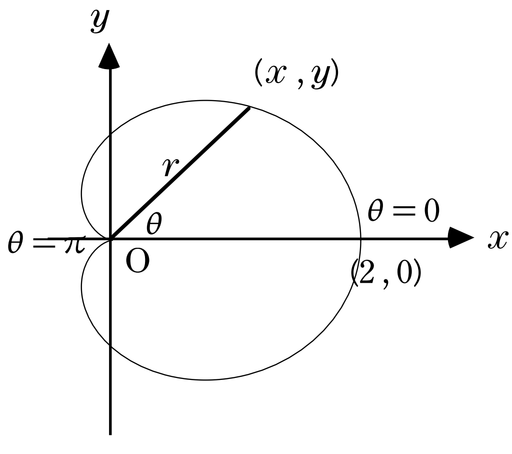
$$V=\int_{(t=-2)}^{(t=2)} \pi y^2\,dx=\int_{-2}^2 \pi y^2\frac{dx}{dt}dt$$
$$=\pi\int_{-2}^2 (-t^2+4)^2(-2t+2)\,dt$$
$$=\pi\int_{-2}^2 (t^4-8t^2+16)(-2t+2)\,dt$$
$$=4\pi\int_0^2 (t^4-8t^2+16)\,dt$$
$$=4\pi\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+16t\right]_0^2=\frac{1024}{15}\pi$$



また，この体積 V は次のように $2\pi yx\,dy$ を点 $(8\,,0)$ から点 $(0\,,0)$ まで**線積分**することによっても得られますが，理由は（図５）を参考にして考えて下さい.

$$V=\int_{(t=2)}^{(t=-2)} 2\pi yx\,dy=\int_2^{-2} 2\pi yx\frac{dy}{dt}dt=2\pi\int_2^{-2} (-t^2+4)(-t^2+2t+8)(-2t)\,dt$$
$$=4\pi\int_{-2}^2 t(-t^2+4)(-t^2+2t+8)\,dt=8\pi\int_0^2 (-2t^4+8t^2)\,dt=8\pi\left[-\frac{2}{5}t^5+\frac{8}{3}t^3\right]_0^2$$
$$=\frac{1024}{15}\pi$$

極方程式 $r=f(\theta)$ で表された曲線も，極を原点とし始線を x 軸とする直交座標で表すと θ を媒介変数として $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=f(\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ となるから，面積・体積などは**線積分**によって求まります.



たとえば，カージオイド $r=1+\cos\theta$ を始線の周りに回転させて得られる立体の体

極を原点とし，始線を x 軸とする直交座標を $(x\,,y)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = (1+\cos\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

求める体積は $\pi y^2 dx$ を図の上半分の曲線に沿って点 $(0\,,0)$ から点 $(2\,,0)$ まで**線積分**すればよいから，

$$\begin{aligned} V &= \int_{(\theta=\pi)}^{(\theta=0)} \pi y^2\,dx = \int_{\pi}^{0} \pi y^2 \frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \pi\int_{\pi}^{0} (1+\cos\theta)^2 \sin^2\theta(-\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta \\ &= \pi\int_{\pi}^{0} \sin^2\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)(\cos\theta)'\,d\theta \\ &= \pi\int_{-1}^{1} (1-t^2)(1+t)^2(1+2t)\,dt = 2\pi\int_{0}^{1} (1+4t^2-5t^4)\,dt = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$