０３０５．空間図形の計量

☒**D－１**☒　１辺の長さが６の正四面体 ABCD の辺 BC の中点を M とする．いま，十分に長い円筒があって，△DBC とは線分 DM のみを共有し，さらに２辺 AB , CD に接している．

(1)　円筒の半径 r を求めよ．

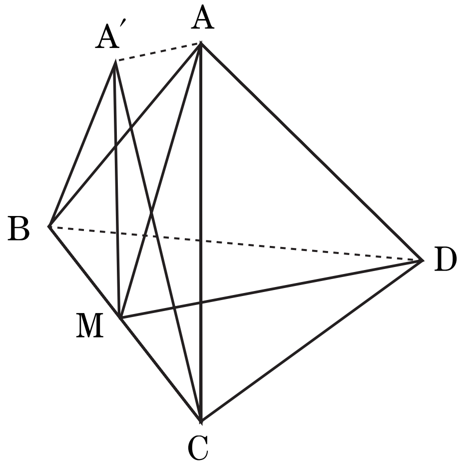
(2)　正四面体の表面のうち円筒の内側にある部分の面積を r を用いて表せ．

【着眼点】

DM に垂直な平面上への正射影を考えます．(2) は，ある平面上の面積 S の図形を，その平面と θ の角をなす平面上へ正射影した図形の面積が S' であるとき，図形の形に関係なく $\dfrac{S'}{S}=\cos\theta$ が成り立つことを利用します．

【解答】

(1)　辺 BC を含み MD に垂直な平面を π とし，点 A の π 上への正射影を A' とすると，r は △A′BC の内接円の半径に等しい．A から平面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると H は △BCD の重心であるから



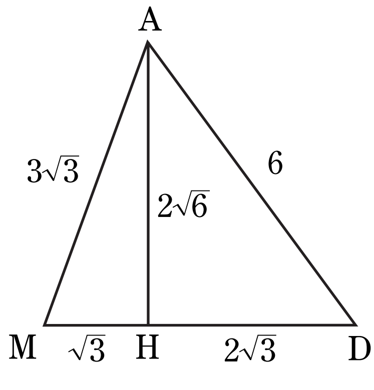
$$\mathrm{MH}=\frac{1}{3}\mathrm{MD}=\sqrt{3}$$

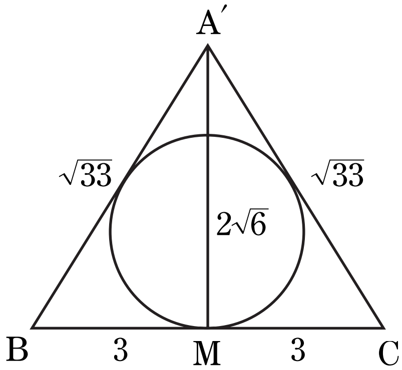
$$\therefore\quad \mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{MH}^2}=\sqrt{27-3}=2\sqrt{6}$$

そこで △A′BC の面積を２通りに表すと

$$\frac{1}{2}r(6+2\sqrt{33})=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{6}$$

$$\therefore\quad r=\frac{6\sqrt{6}}{3+\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{33}-3)}{4}=\frac{3(\sqrt{22}-\sqrt{6})}{4}$$





(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ のうち円筒の内側にある部分を E_1 とすると, E_1 の π 上への正射影は $\triangle\mathrm{A'BC}$ の内接円である．そして, $\triangle\mathrm{ABC}$ の π 上への正射影は $\triangle\mathrm{A'BC}$ であるから, E_1 の面積を S_1 とすると,

$$\frac{\pi r^2}{S_1}=\frac{\triangle\mathrm{A'BC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{A'M}}{\mathrm{AM}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

次に, $\triangle\mathrm{ABD}, \triangle\mathrm{ACD}$ のうち円筒の内側にある部分をそれぞれ E_2, E_3 とすると, E_2 の π 上への正射影は $\triangle\mathrm{A'BC}$ の内接円の半分であり, E_3 の π 上への正射影は $\triangle\mathrm{A'BC}$ の内接円の残り半分である．そして, $\triangle\mathrm{ABD}$, $\triangle\mathrm{ACD}$ の π 上への正射影はそれぞれ $\triangle\mathrm{A'BM}$, $\triangle\mathrm{A'CM}$ であるから, E_2, E_3 の面積をそれぞれ S_2, S_3 とすると, 明らかに $S_2=S_3$ であって,

$$\frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{S_2}=\frac{\triangle\mathrm{A'BM}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\triangle\mathrm{A'BC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

以上により,

$$S_1+S_2+S_3=\frac{3\pi r^2}{2\sqrt{2}}+2\cdot\frac{3\pi r^2}{2\sqrt{2}}=\frac{9\pi r^2}{2\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}\pi r^2}{4}$$